

# **Estymacja wielowymiarowych indeksów dla danych porządkowych**

(badanie wykonane w ramach grantu MNiD)

Radosław Kurek

## **Wstęp**

Standardowe miary nierówności nie są dobrze przystosowane do danych porządkowych, takich jak zadeklarowany stan zdrowia czy poziom wykształcenia. Literatura w zakresie tego problemu wzrosła w ciągu ostatniej dekady, głównie wokół bipolarnego porządku zaproponowanego przez Allison i Foster (2004), odtąd AF. Niedawno w Journal of Economic Inequality ukazał się artykuł Kobus i Kurek (2018) rozszerzający tę sytuację do wielu wymiarów. W tym badaniu zostało to jeszcze dalej rozszerzone o miary nierówności oparte na sumowaniu drugiego rzędu (analogicznego do dominacji stochastycznej drugiego rzędu). Pomysł, aby w jednym wymiarze wprowadzić definicję opartą na podwójnym sumowaniu należał do Chakravarty i Maharaj (2015). W pracy wprowadzono również warunki uniezależniające od największej wady podejścia AF czyli wymagania tych samych median.

## **Metody**

W badaniu stosowane są dwie definicje wielowymiarowego AF. Jedna, najprostsza możliwa, oparta jest na założeniu o niezależności pomiędzy poszczególnymi wymiarami. Druga natomiast wprowadza pomocnicze pojęcie mediany wielowymiarowej, która dzieli przestrzeń na trzy obszary – obszar punktów mniejszych niż mediana, większych niż mediana i nieporównywalnych z medianą. Porównywanie odbywa się poprzez standardowy porządek częściowy. Obie te definicje zostały rozszerzone do drugiego sumowania. Łatwo zauważyć, że definicje AF i odpowiednika drugiego rzędu można w łatwy sposób rozszerzyć tak, aby porównywanie rozkładów prawdopodobieństwa nie wymagało posiadania tych samych median. Odbywa się to poprzez zmianę układu odniesienia na względny, gdzie punktem zaczepienia jest właśnie mediana a zamiast wartości kategorii jest jej odległość od mediany.

Miary nierówności w badaniu zostały oparte na już istniejących miarach wielowymiarowego AF, w związku z czym są one z nimi zgodne. Wynika z tego, że jeżeli dwa rozkłady są w relacji

AF (a co za tym idzie również w relacji opartej na dwukrotnym sumowaniu) to zarówno istniejące jak i wprowadzone indeksy będą to odzwierciedlały.

Główną różnicą pomiędzy metodami w tym badaniu a powszechnie używaną definicją AF jest odejście od dystrybuanty i wprowadzenie funkcji przeżycia do punktów większych niż mediana. Tradycyjne podejście polegające na odwróceniu relacji po przekroczeniu mediany wydaje się być bardziej restrykcyjne niż wprowadzenie dominacji opartej na funkcji przeżycia. Dla jednego wymiaru są to identyczne struktury, jednak dla większej liczby wymiarów dominacja stochastyczna zdefiniowana poprzez dystrybuantę i taka zdefiniowana poprzez funkcję przeżycia daje różne rezultaty.

Przedstawione miary nierówności spełniają szereg aksjomatów wymaganych od miar zgodnych z daną relacją. Zostały one ponadto unormowane, co wiązało się z wprowadzeniem dodatkowego założenia, które jednakże jest stricte techniczne. W dowolnej sytuacji trudno jest pogodzić rozkład najlepszy (taki gdzie połowa masy znajduje się w najmniejszej kategorii a połowa w największej) z warunkiem aby mediana znajdowała się w konkretnym punkcie – można wtedy oczywiście wprowadzić nieskończenie małą masę prawdopodobieństwa w medianie, ale wiąże się to z tym, że nie ma wartości maksymalnej miary (przedział wartości jest otwarty).

W pracy zostały użyte standardowe narzędzia wnioskowania statystycznego, w celu stwierdzenia działania wprowadzonych miar. Narzędzia te są oparte na centralnym twierdzeniu granicznym i metodzie delta. W celu sprawdzenia miar, dla danych SHARE, zostały znalezione relacje dominacji AF opartej na podwójnym sumowaniu dla poszczególnych krajów. Została wybrana definicja wykorzystująca definicję opartą na założeniu o niezależności pomiędzy wymiarami, ze względu na pełną zgodność z jednowymiarową definicją. Dla tych relacji zostały policzone indeksy wraz z odchyleniami standardowymi oraz statystyki testowe. Zgodność relacji z miarą oznacza, że statystyka testowa będąca różnicą wyestymowanych indeksów przeskalowaną przez odchylenie standardowe musi być większa niż 1.96, aby był to wynik istotny statystycznie.

## **Wyniki badania**

Do celów badania napisany został algorytm wyszukujący relacje dominacji oraz obliczający wartości indeksów (miar), odchyłeń standardowych i statystyk testowych. Na jego podstawie zostały policzone wyniki wskazujące na pomyślne działanie miar. Algorytm posiada możliwość wprowadzenia parametrów dla każdej z miar i na tej podstawie została porównana sytuacja,

gdzie wszystkie kategorie są równie ważne z sytuacją, gdzie przykładamy większą wagę do ogona rozkładu. Zaskakującym wnioskiem otrzymanym po analizie otrzymanych wyników jest fakt, że wprowadzone miary oparte na sumowaniu drugiego rzędu zachowują się niezwykle podobnie do swoich pierwowzorów, opartych na pojedynczym sumowaniu wartości prawdopodobieństwa. Kolejnym zaskakującym wnioskiem są wyniki miar opartych na drugiej definicji relacji AF, które również dają pozytywne rezultaty.